Capítulo 3

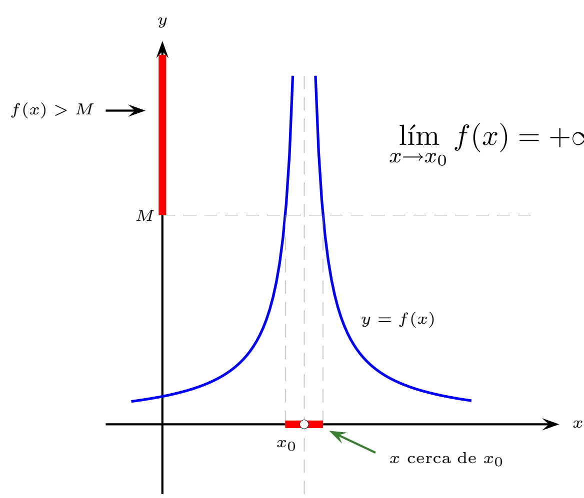
Límite de una función

[1]

3.4 Límites infinitos.

- Si dado cualquier número $M > 0$, $f(x) > M$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0 diremos que $f(x)$ diverge a $+\infty$ (se lee más infinito) y lo denotaremos así: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

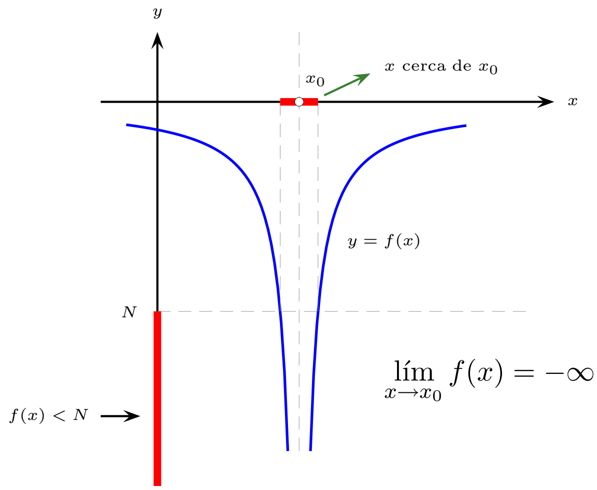
  Gráficamente $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = M$ con $M > 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está arriba de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0



- Si dado cualquier número $N < 0$, $f(x) < N$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0 diremos que $f(x)$ diverge a $-\infty$ (se lee menos infinito) y lo denotaremos así: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

  Gráficamente $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = N$ con $N < 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está abajo de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0

[1]canek.azc.uam.mx: 24/ 5/ 2007



Las definiciones de $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ son análogas.

Tenemos entonces:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Ejemplo 3.4.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$, *mostrar numéricamente que* $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$.

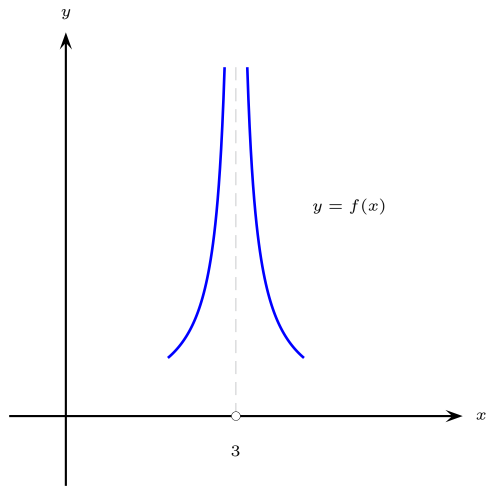
▼ Numéricamente podemos dar a la variable x valores cada vez más cercanos (por la izquierda o por la derecha) al número $x_0 = 3$, obtener las imágenes $f(x)$ correspondientes y observar su comportamiento.

x	$f(x)$
2.9	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
2.99	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
2.999	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
2.9999	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^-	$+\infty$

x	$f(x)$
3.1	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
3.01	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
3.001	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
3.0001	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^+	$+\infty$

Observamos aquí que cuanto más se acerca x al número $x_0 = 3$, las imágenes $f(x)\,(= 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, \ldots)$ son cada vez más grandes. Este comportamiento es el que (intuitivamente) nos lleva a afirmar que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 3$. Es decir $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

Gráficamente se ve así:



□

Ejemplo 3.4.2 *Dada* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$, *mostrar numéricamente que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

▼ Damos a x valores numéricos cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$, primero por la izquierda ($x \to 2^-$) y luego por la derecha ($x \to 2^+$), obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes y observamos su comportamiento.

1. Cuando $x \to 2^-$:

$$x = 1.9 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(1.9-2)^4} = \frac{-1}{(-0.1)^4} = \frac{-1}{(-10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4$$
$$x = 1.99 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(1.99-2)^4} = \frac{-1}{(-0.01)^4} = \frac{-1}{(-10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8$$
$$x = 1.999 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(1.999-2)^4} = \frac{-1}{(-0.001)^4} = \frac{-1}{(-10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}$$

Observamos aquí que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto. Intuitivamente decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$. Esto es $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

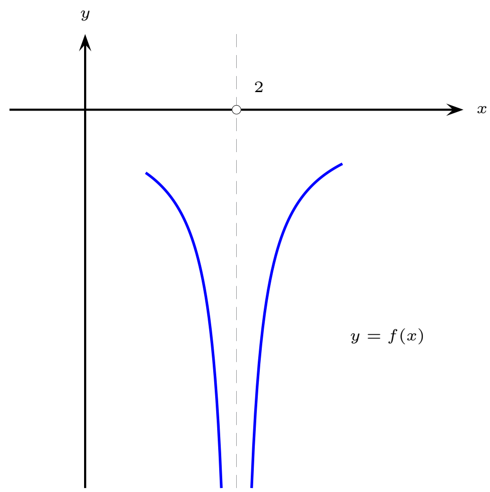
2. Cuando $x \to 2^+$:

$$x = 2.1 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(2.1-2)^4} = \frac{-1}{(0.1)^4} = \frac{-1}{(10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4$$
$$x = 2.01 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(2.01-2)^4} = \frac{-1}{(0.01)^4} = \frac{-1}{(10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8$$
$$x = 2.001 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{-1}{(2.001-2)^4} = \frac{-1}{(0.001)^4} = \frac{-1}{(10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}$$

Aquí también observamos que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto; por lo cual (intuitivamente) decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$. Es decir, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

3. Ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

Gráficamente se ve así:



$\square$

Además tenemos en general

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $g(x) > 0$ cerca de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c > 0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $g(x) < 0$ cerca de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c > 0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $g(x) > 0$ cerca de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c < 0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $g(x) < 0$ cerca de x_0 entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c < 0$

Algunos autores escriben

- "$\left(\dfrac{c}{0^+}\right)$" = "$\left(\dfrac{+}{0^+}\right)$" $= +\infty$ si $c > 0$
- "$\left(\dfrac{c}{0^-}\right)$" = "$\left(\dfrac{+}{0^-}\right)$" $= -\infty$ si $c > 0$
- "$\left(\dfrac{c}{0^+}\right)$" = "$\left(\dfrac{-}{0^+}\right)$" $= -\infty$ si $c < 0$
- "$\left(\dfrac{c}{0^-}\right)$" = "$\left(\dfrac{-}{0^-}\right)$" $= +\infty$ si $c < 0$

Ejemplo 3.4.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ & $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$.

▼

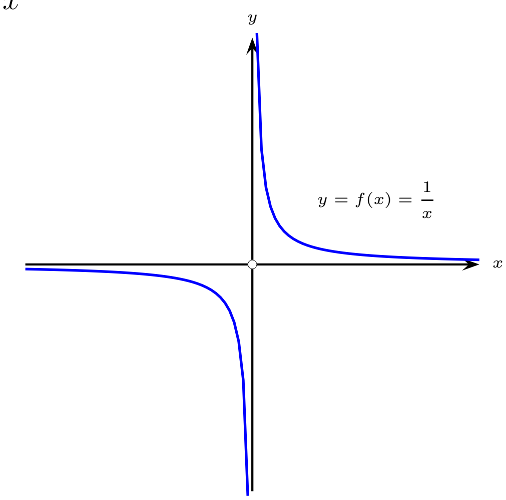
1. Si $x \to 0^-$ entonces $x < 0$ & $\dfrac{1}{x} < 0$

   Como $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ & $x < 0$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

2. Si $x \to 0^+$ entonces $x > 0$ & $\dfrac{1}{x} > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ & $x > 0$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Recordemos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola equilátera.



□

Ejemplo 3.4.4 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-2}{x-1}$ & $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{x-1}$.

▼

1. Si $x \to 1^-$ entonces $x < 1$ por lo que $x - 1 < 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0$ & $x - 1 < 0$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-2}{x-1} = +\infty$.

2. Si $x \to 1^+$ entonces $x > 1$ por lo cual $x - 1 > 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} < 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$ & $x - 1 > 0$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{x-1} = -\infty$.

Como consecuencia no existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{x-1}$. No es $+\infty$ ni $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$, *calcular:*

$$\lim_{x \to -2^-} f(x), \quad \lim_{x \to -2^+} f(x), \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \& \quad \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

▼ Notamos que

$$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2^2} \Leftrightarrow |\,x\,| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

así también

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\,x\,| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ o bien } x > 2$$

Luego

1. Si $x \to -2^-$ entonces $x < -2$ por lo que $x^2 - 4 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to -2^-} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$ entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3}{x^2 - 4} = +\infty$.

2. Si $x \to -2^+$ entonces $|\,x\,| < 2$ por lo que $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to -2^+} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$ entonces $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = -\infty$.

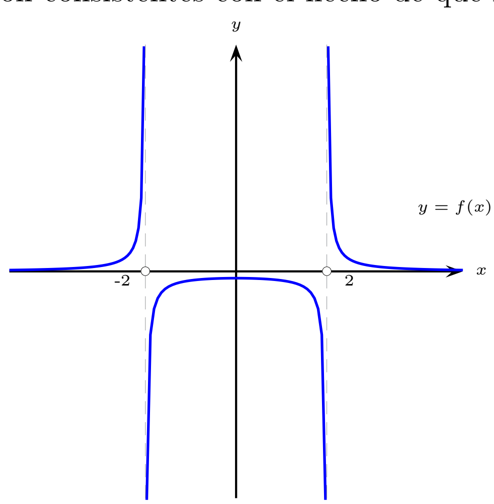
3. Si $x \to 2^-$ entonces $|\,x\,| < 2$ por lo cual $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x^2 - 4} = -\infty$.

4. Si $x \to 2^+$ entonces $x > 2$ por lo cual $x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = +\infty$.

Los resultados 1. y 4. y el 2. y 3. son consistentes con el hecho de que la función es par.



En general tenemos:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$

$$\text{“}\left(\frac{+}{0^+}\right)\text{”} = +\infty$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$

$$``\left(\frac{-}{0^+}\right)" = -\infty$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha > 0$

$$``\left(\frac{+}{0^-}\right)" = -\infty$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha < 0$

$$``\left(\frac{-}{0^-}\right)" = +\infty$$

Ejemplo 3.4.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-3}{x-1}$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{x-1}$.

▼ Notamos que $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = \lim\limits_{x\to 1}(x-3) = 1-3 = -2$

1. Si $x \to 1^-$ entonces $x < 1$ por lo cual $x - 1 < 0$

   Como $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$, $x-1 < 0$ & $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3) = -2 < 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$

2. Si $x \to 1^+$ entonces $x > 1$ por lo que $x - 1 > 0$

   Como $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$, $x-1 > 0$ & $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = -2 < 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x-1}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+2}{x^3+8}$ & $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+2}{x^3+8}$.

▼ Recordemos el comportamiento creciente de la función $y = x^3$.
Notemos además que

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+2) = \lim_{x\to -2^+}(x^2+2) = \lim_{x\to -2}(x^2+2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

1. Si $x \to -2^-$ entonces $x < -2$ por lo cual $x^3 < (-2)^3 \Rightarrow x^3 < -8 \Rightarrow x^3 + 8 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to -2^-}(x^3+8) = 0$, $x^3+8 < 0$ & $\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2+2) = 6 > 0$ entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+2}{x^3+8} = -\infty$.

2. Si $x \to -2^+$ entonces $x > -2$ por lo que $x^3 > (-2)^3 \Rightarrow x^3 > -8 \Rightarrow x^3 + 8 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^3 + 8) = 0$, $x^3 + 8 > 0$ & $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 + 2) = 6 > 0$ entonces $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 8} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 8}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

$\square$

Algunas afirmaciones interesantes que podemos hacer con límites infinitos son las siguientes:

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) \pm f(x)] = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty$ si $\alpha > 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty$ si $\alpha < 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^+$ si $\alpha > 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^-$ si $\alpha < 0$

Hacemos notar que:

- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0^+$ quiere decir que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) > 0$ cerca de x_0.
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0^-$ quiere decir que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) < 0$ cerca de x_0.

Resultados análogos se obtienen para el caso en que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ y todos siguen siendo válidos si en lugar de x_0 ponemos x_0^- o bien x_0^+.

Ejemplo 3.4.8 *Dadas las funciones* $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x-1}$, *obtener*

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} [f(x) - g(x)]$
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} [f(x) \times g(x)]$
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)}{f(x)}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}[g(x)-f(x)]$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}[g(x)-f(x)]$

▼ Sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$.
Además:

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)}=\lim_{x\to 1}[-(1+x)]=-2$$

por lo cual $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=-2$.

1. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}[f(x)-g(x)]=+\infty$.

2. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}[f(x)\times g(x)]=+\infty$

3. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=-\infty$.

4. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]=0^+$

5. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}[g(x)-f(x)]=-\infty$

6. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} g(x)=-2$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}[g(x)-f(x)]=+\infty$

□

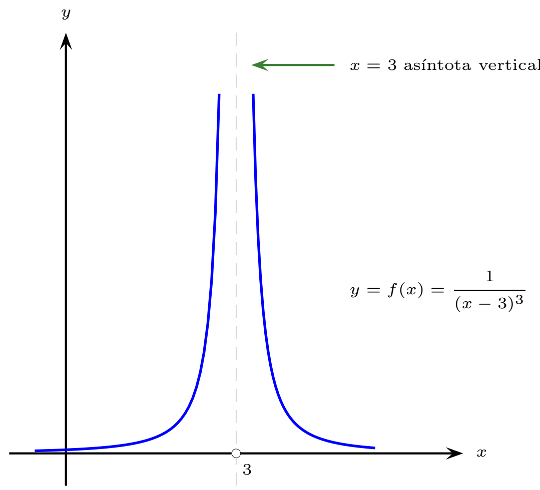
<u>Definición</u>.- La recta $x=a$ es una **<u>asíntota vertical</u>** de la función f o bien de la curva $y=f(x)$ si ocurre al menos una de las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty;\qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

Nota. Determinar las asíntotas verticales de una función resulta de mucha utilidad para realizar el bosquejo de la gráfica de una función.

Ejemplo 3.4.9

▼ Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$. Por lo tanto la recta $x=3$ es una asíntota vertical de la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

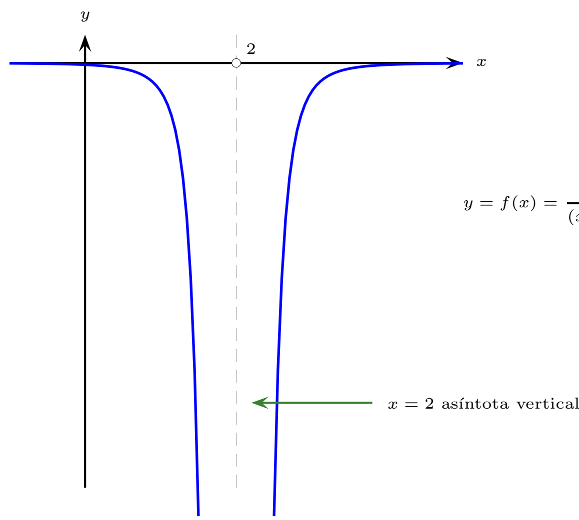


$\square$

Ejemplo 3.4.10

▼ Para la función $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$ sabemos que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Luego la recta $x = 2$ es una asíntota verical de la curva $y = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$.



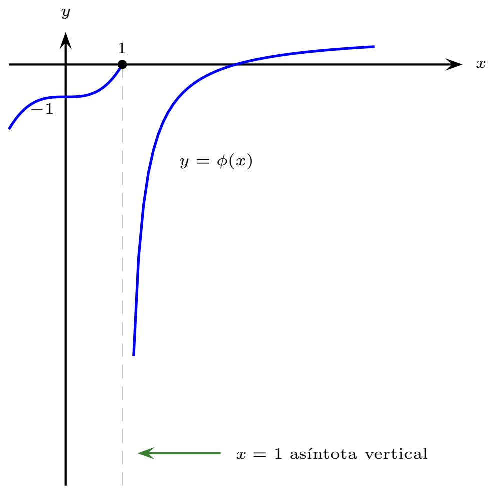
$\square$

Ejemplo 3.4.11

▼ Dada la función $\phi(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-3}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

se tiene que $\lim\limits_{x \to 1^+} \phi(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-3}{x-1} = -\infty$

Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función ϕ o bien de la curva $y = \phi(x)$.



Nótese que

$$\lim_{x\to 1^-} \phi(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0$$

$\square$

Ejercicios 3.4.1 *Soluciones en la página 13*

I. Calcular los límites siguientes:

1. Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   Calcular: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, & $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Para $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

   Calcular: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, & $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

3. Para $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

   Calcular: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, & $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. Para $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$

   Calcular: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

5. Para $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|\,x\,|}$, calcular:

   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, & $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. Para $f(x) = \dfrac{-5x}{(x^2-4)^2}$

   Calcular: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, & $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \ ,$$
donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.
   (a) Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz
   (b) Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim\limits_{v \to c^-} m$

8. Calcular: $\lim\limits_{s \to 2^+} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4} \right)$.

9. Calcular: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x^2}{x^2-1}$.

10. Calcular: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-x^2}{4-x^2}$.

Ejercicios 3.4.1 *página 11*

1. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$;

   $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$

2. $\lim_{x\to -2^-} \frac{-3}{x+2} = +\infty$;

   $\lim_{x\to -2^+} \frac{-3}{x+2} = -\infty$;

   $\lim_{x\to -2} \frac{-3}{x+2}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$

3. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$;

   $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$;

   $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2} = \pm\infty$

4. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$;

   $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$;

   $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;

   $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

5. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$;

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$;

   $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

6. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;

   $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$;

   $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$.

   $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$;

   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$;

   $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

7. (a) $\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \frac{cm_0}{\sqrt{c^2-v^2}} = +\infty$.

   (b) Puesto que $v < c$

8. $\lim_{s\to 2^+} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4}\right) = +\infty$

9. $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{3x^2}{x^2-1}\right) = -\infty$

10. $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{-x^2}{4-x^2}\right) = +\infty$