CAPÍTULO 2 – Modelado y Transformaciones Geométricas

Antes que nada, en este trabajo veremos algunas animaciones, por lo cual se presenta en el presente capítulo algunos conceptos que explican el comportamiento de los objetos dentro del mundo virtual. Los objetos en 3D se componen de un número finito de puntos. Estos puntos pueden ser representados por una matriz de puntos, las cuales al pre-multiplicarse por una matriz homogénea representa una transformación al objeto dentro del eje de coordenadas XYZ.

Se explicarán los modelados y transformaciones geométricos con respecto a un punto y su comportamiento dentro del eje de coordenadas para dar la idea principal de que dicha transformación se puede aplicar a todo el objeto.

2.1 Graficación

Debido a que en el presente trabajo se plasmarán diferentes sistemas anatómicos del ser humano, es importante entender como se representan estos cuerpos que se modelan dentro del entorno virtual.

Los métodos para las transformaciones y modelado geométricas de objetos en 3D se extienden de los métodos bidimensionales al incluir la coordenada Z. Como en el caso de las dos dimensiones, expresamos las transformaciones geométricas en forma de matrices homogéneas, así cualquier secuencia de transformaciones se representa como una sola matriz, que se crea al concatenar las matrices para las transformaciones individuales en la secuencia.

Cuando una vista del entorno virtual es renderizado, esta matriz es generada para mostrar la posición actual del objeto dentro del entorno virtual [VIJ95].

2.1.1 Traslación

La transformación de traslación permite a un objeto ser posicionado en cualquier parte dentro de un entorno virtual simplemente especificando los valores de los tres desplazamientos que están asociados con los vértices (puntos) del objeto en 3D.

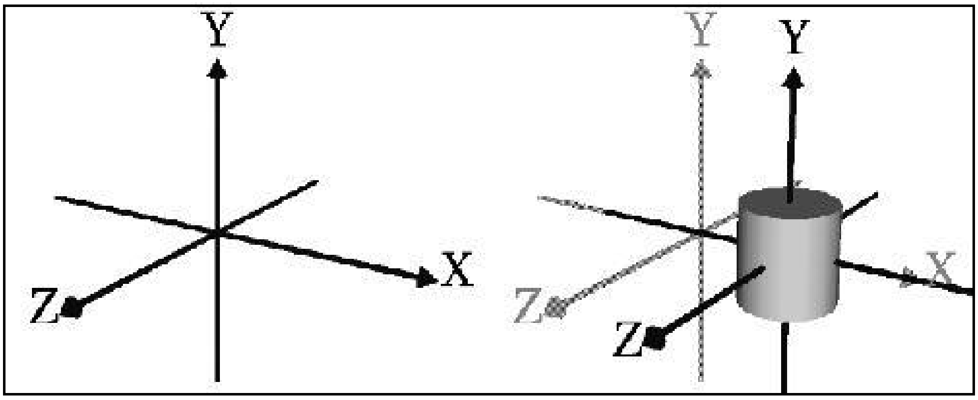

Figura 2.1 Un objeto puede ser trasladado en el espacio con solo sumarle 3 desplazamientos, tx, ty y tz a las coordenadas *x*, *y* y *z*

Debido a que la transformación de la traslación requiere un valor para ser sumado a un punto, la matriz que representa esta acción en 3D debe de ser una matriz de 4 x 4 para incorporar los términos de traslación [VIJ95].

Cualquier punto $P = (x, y, z)$ puede ser ubicado en $P' = (x', y', z')$ con sumarle t_x, t_y y t_z a x, y y z respectivamente:

$$x' = x + t_{x'}$$

$$y' = y + t_{y'}$$

$$z = z + t_z$$

lo cual puede ser representado por la siguiente operación de una matriz homogénea:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.2 Matriz que representa la operación de traslación

ó **P' = T . P**

2.1.2 Escalación

La transformación de la escalación altera el tamaño del objeto, esto lo hace escalando cada uno de sus coordenadas con respecto al origen del eje de coordenadas [VIJ95].

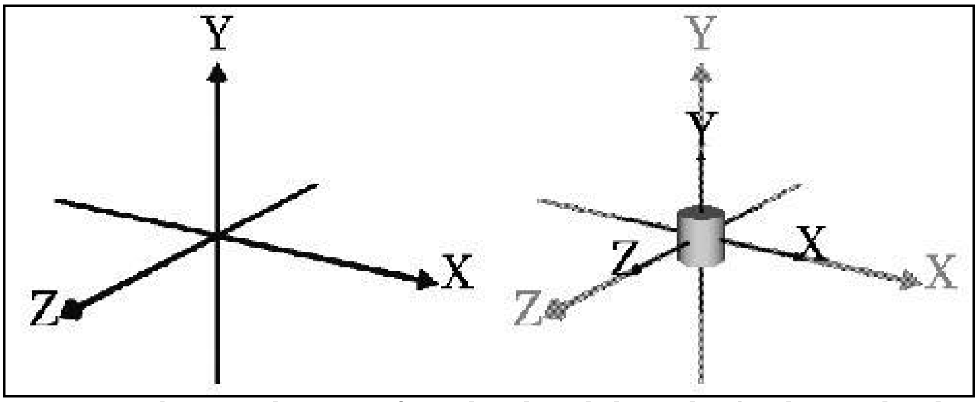

Figura 2.3 Un objeto puede ser transformado aplicando la escalación a las coordenadas x, y y z.

La expresión matricial para la transformación de escalación de una posición P = (x, y, z) con respecto del origen de las coordenadas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.4 Matriz de operación que representa la escalación

ó **P' = S . P**

donde los parámetros de escalación s_x, s_y y s_z se asignan cualesquiera valores positivos. Las expresiones explícitas para las transformaciones de las coordenadas para la escalación con respecto al eje de origen son [VIJ95]:

$$x' = x \cdot Sx'$$

$$y' = y \cdot Sy'$$

$$z = z \cdot Sz$$

Escalar un objeto con la transformación hace cambiar el tamaño del objeto y lo vuelve a posicionar con respecto del origen de las coordenadas.

2.1.3 Rotación

La orientación en la rotación puede ser especificada en una variedad de formas, lo que se explica a continuación es la rotación de un punto con respecto a los ejes fijos. Un eje de rotación define el polo sobre el cual se va a rotar, como los polos Norte y Sur de la Tierra [VIJ95].

Por ello, haremos la explicación basándonos en la regla de la mano derecha, la cual ayudará a recordar las direcciones positivas y negativas de rotación. Este método consiste en abrir nuestra mano derecha, estirar el dedo pulgar, apuntar con el mismo en la dirección positiva del eje y encurven los dedos alrededor del eje (véase Fig. 2.5), así, la dirección de la encurvación le indica cuál es una rotación positiva [www22].

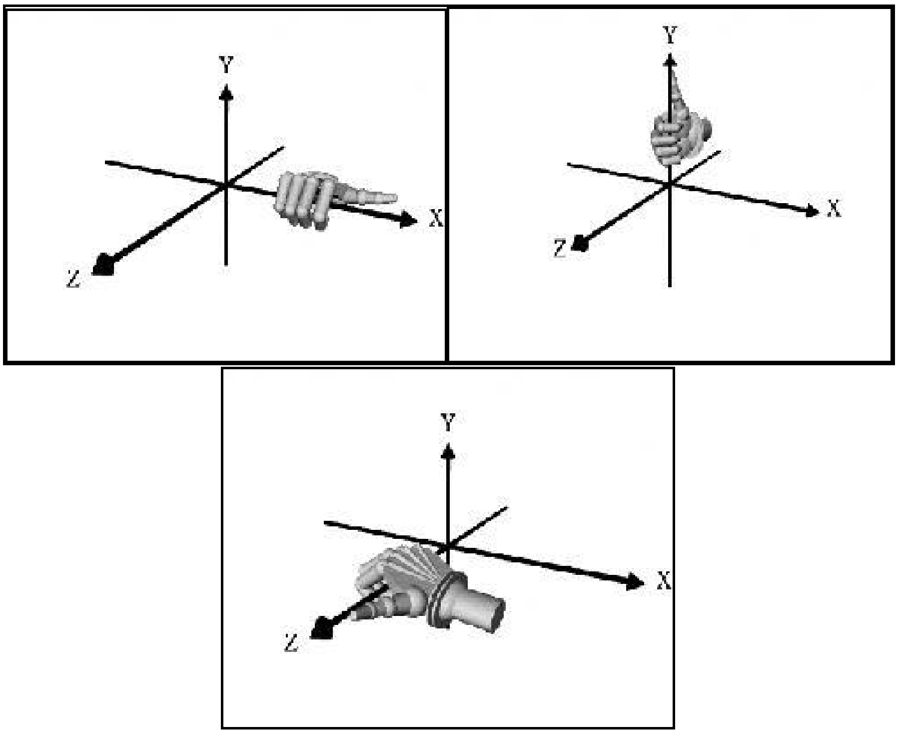

Figura 2.5 Regla de la mano derecha

Para generar una transformación de rotación para un objeto, debemos designar un eje de rotación (con respecto al cual girará el objeto) y la cantidad de rotación angular. Los ejes de rotación más fáciles de manejar son aquellos paralelos a los ejes de las coordenadas [www22].

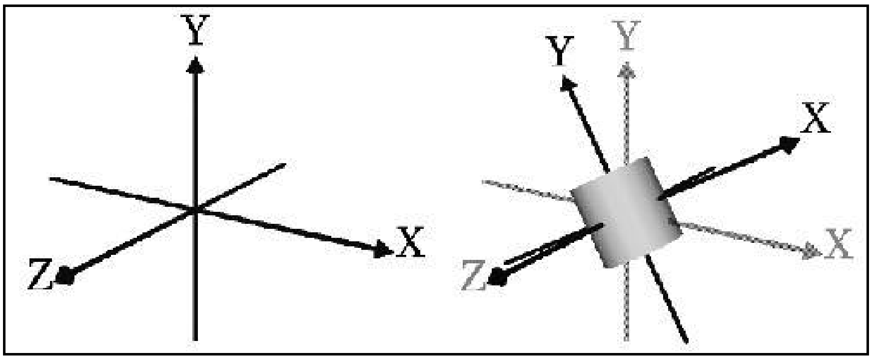

Figura 2.6 Un objeto orientado en forma paralela al eje z.

También se puede utilizar combinaciones de rotaciones de ejes de coordenadas (junto con traslaciones apropiadas) para especificar cualquier rotación general [VIJ95].

Las ecuaciones de la rotación en 3D son las siguientes:

?? Con respecto al eje de las *z*:

$$x' = x\ cosØ - y\ senØ$$

$$y' = x\ senØ + y\ cosØ$$

$$z' = z$$

El parámetro Ø especifica el ángulo de rotación. En la forma homogénea de las coordenadas, las ecuaciones de la rotación del eje de las *z* tridimensional se expresan como [VIJ95]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -sen\,\phi & 0 & 0 \\ sen\,\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.7 Matriz operacional del rotar sobre el eje de las Z

que podemos escribir de manera más precisa como

$$P' = R_z(Ø) . P$$

?? Con respecto al eje de las *x*:

$$y' = y \cos Ø - z \, sen Ø$$

$$z' = y \, sen Ø + z \cos Ø$$

$$x' = x$$

la representación para el eje de las *x* es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -sen\,\phi & 0 \\ 0 & sen\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.8 Matriz operacional del rotar sobre el eje de las X

que se puede expresar en la forma de coordenadas homogéneas

$$P' = R_x(Ø) \cdot P$$

?? Con respecto al eje de las *y*:

$$z' = z\ cosØ - x\ senØ$$

$$x' = z\ senØ + x\ cosØ$$

$$y' = y$$

la representación para el eje de las *y* es []:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & sen\,\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\,\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2.9 Matriz operacional del rotar sobre el eje de las Y

$$ó\ P' = R_y(Ø) \cdot P$$

2.2 Robótica

Dado que en nuestro trabajo se manejan movimientos (por ejemplo el brazo humano), es necesario e importante entender este tipo de comportamiento que tienen los objetos dentro del entorno virtual. Este punto es uno de los temas más estudiados en el área de la Robótica, por ello, recurrimos al concepto de cinemática, que trata el estudio analítico de la geometría de los movimientos del robot con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo sin considerar las fuerzas o momentos que originan el movimiento [FGL88].

Dentro del estudio de la cinemática, existen dos casos: el problema de la cinemática Directa y el problema de la cinemática Inversa.

2.2.1 Cinemática Directa

El problema de la cinemática directa consiste en encontrar la matriz de transformación a través del mapeo o trazo que relacione el sistema de coordenadas del elemento final (espacio de unión) con el sistema de coordenadas de referencia (espacio de configuración del efector final) [FGL88].

2.2.2 Cinemática Inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en que dado el espacio de configuración del efector final (posición y orientación) se debe encontrar su relación con el espacio de unión (los valores iniciales) a través de un mapeo inverso [FGL88].

El problema de la cinemática inversa es un poco más complicado debido a que pueden existir diversas soluciones para satisfacer un mismo espacio de configuración del efector final. Además de ello, un robot puede que presente soluciones que no se encuentren en el rango de configuración de su efector final y de la estructura de su brazo [LMR99].

Los problemas de la cinemática directa y la cinemática inversa se pueden resumir en la siguiente gráfica:

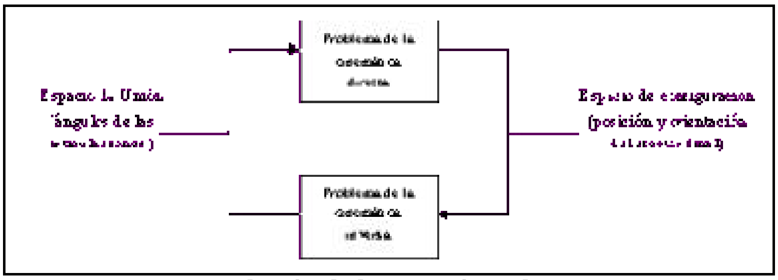

Figura 2.10 Relación de la cinemática directa e inversa

Los movimientos del robot se pueden dividir en dos categorías: movimientos de brazo y cuerpo y movimientos de la muñeca. Los movimientos de articulaciones individuales asociados con estas dos categorías se denomina "grados de libertad". Por ejemplo, la muñeca del ser humano consta de tres grados de libertad (elevación, desviación y giro).

2.2.3 Grados de Libertad (DOF-Degrees of Freedom) y Articulaciones

Cualquier punto en un objeto está relacionado a un grupo ortogonal de eje de coordenadas. El número de movimientos independientes que el objeto puede realizar con respecto al grupo de coordenada R es llamado "su número de grados de libertad". Los movimientos que el objeto puede realizar son [CCH83]:

- Las 3 traslaciones T1, T2 y T3 sobre los ejes OX, OY y OZ
- Las 3 rotaciones R1, R2 y R3 sobre los ejes OX, OY y OZ

(ver fig. 2.11)

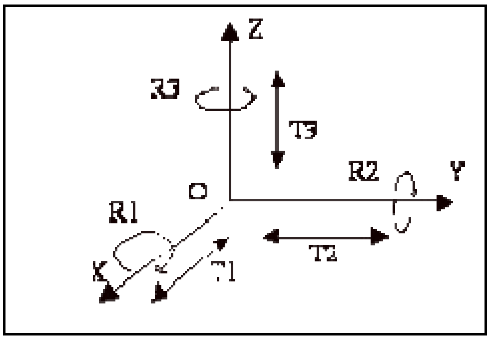

Figura 2.11 Los 6 DOF de un objeto rígido: 3 de traslación y 3 de rotación.

Un objeto simple posee 6 DOF. Cuando se establece una relación entre 2 objetos, cada uno de ellos pierde DOF con respecto el uno del otro. Una relación de éste tipo puede también ser expresado en términos de las rotaciones y/o traslaciones entre 2 cuerpos que tienen que quedar como resultado de la misma relación establecida [CCH83].

En algunos casos no es necesario que se equipe con 6 DOF, ya que puede que no se requieran todas, por ejemplo, el colocar una esfera en un punto dado en el espacio solo necesita de 3 DOF [CCH83].

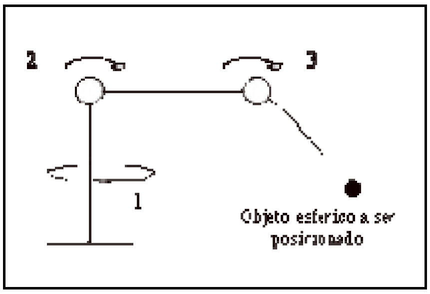

Figura 2.12 Sólo 3 DOF se requieren para llevar una esfera a un punto en el espacio.

En nuestro trabajo utilizamos objetos que representan cuerpos rígidos, llamados elementos, los cuales están conectados mediante articulaciones. Cada articulación - elemento constituye un grado de libertad. Los movimientos de brazo y cuerpo utilizan los mismos principios que la graficación en las transformaciones de traslación y rotación, por tal motivo se obviarán tales explicaciones.

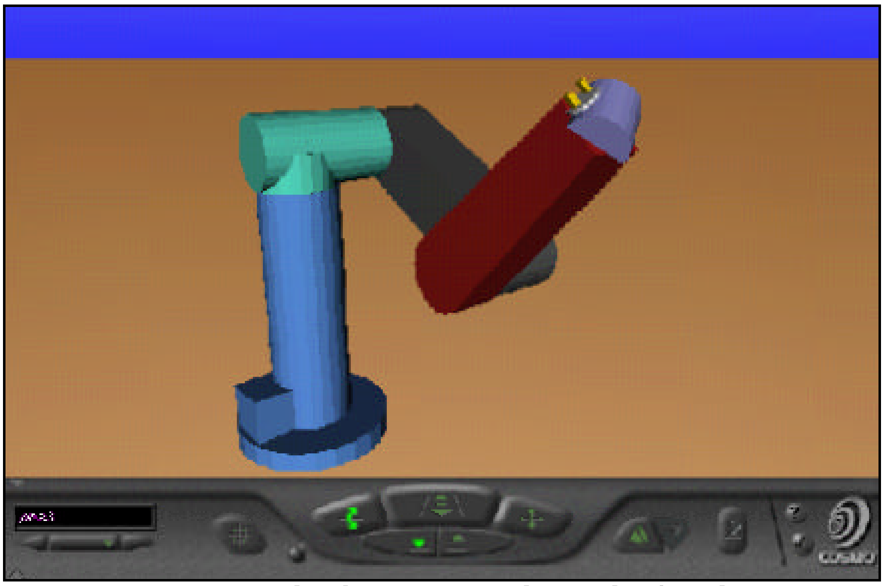

Figura 2.13 Brazo de robot compuesto de articulación - elemento

En general, dos elementos se conectan mediante un tipo de articulación que tiene dos superficies deslizantes, una sobre la otra, mientras permanecen en contacto. Existen sólo seis tipos de articulaciones: de revolución (giratoria), prismática (deslizante), cilíndrica, esférica, de tornillo y planar. Las más comunes son las articulaciones giratoria y prismática [FGL88].

2.2.4 Modelo Geométrico

Un brazo de robot está compuesto por la sucesión de segmentos sólidos/móviles con respecto uno del otro. Esto es llamado "Cadena Mecánica Articulada" (CMA en adelante). Para poder controlar los movimientos de esta CMA, es importante tener una representación del mismo en forma matemática (ecuaciones), el cual es conocido como modelo [CCH83].

Es virtualmente imposible formar un modelo exacto desde las partes mecánicas que son muy complejas. Al planearse estos modelos, se asumen 2 casos: el que los segmentos del robot son rígidos infinitamente y que todas las articulaciones son perfectas, es decir, sin fricción. Para realizar el modelo más simple, se debe suponer que la unión entre 2 segmentos sucesivos solamente envuelve 1 DOF, ya sea una rotación perfecta o una traslación perfecta [GWNO90]

Considerando un brazo de robot con *n+1* segmentos sucesivos, un grupo de ejes de coordenadas es asociado para cada segmento. El único relacionado al segmento fijo se le conoce como "grupo de coordenadas fijas" (R_0). La tarea es relacionada al grupo de coordenadas [GWNO90].

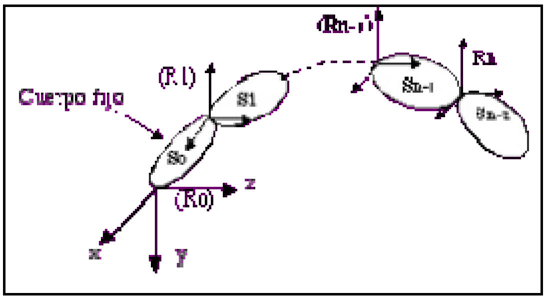

Figura 2.14 CMA al grupo de coordenadas asociadas (R)

Para simplificar los cálculos , los vértices de cada grupo de coordenadas son fijados en la unión de los segmentos donde se asume que está el origen de la traslación o el centro de la rotación relacionada al segmento que le precede [GWNO90].

Los grupos de coordenadas son clasificados para que cada uno (R_q) de los movimientos relacionen a los que le preceden (R_{q-1}) con una rotación sobre un eje de (R_{q-1}) o con una traslación sobre uno de los ejes (R_{q-1}) [CCH83].

2.2.5 Cálculo del Modelo Geométrico

Un robot fijo consta de un brazo, el cual incluye los 3 primeros DOF y un efector final, el cual interactúa con el entorno. El primer punto de interés es el de la orientación y posición del efector final (por ejemplo, un sujetador) en el espacio real, en el grupo de los ejes fijos (R_0). Esto puede ser calculado tomando la fig. 2.15 y la información de los temas de graficación anteriormente mencionados [CCH83].

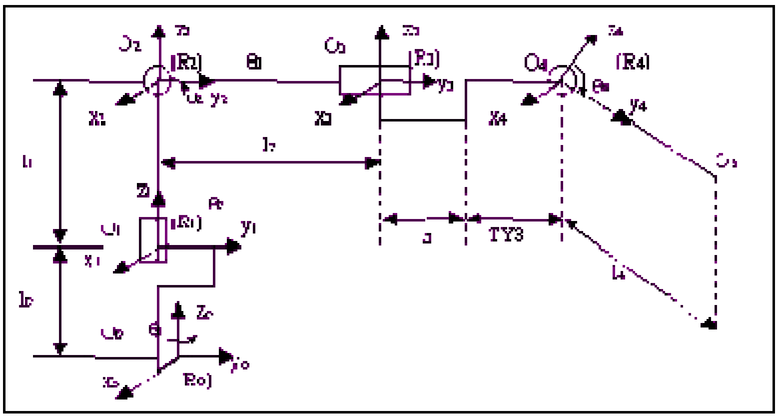

Figura 2.15 Modelo Convencional

El efector final esta representado por el segmento O_4O_5 sobre Y_4. Hay solamente un DOF, una rotación del grupo de coordenadas (R_4) sobre el eje X_3 del grupo de coordenadas que le precede (R3) (el cual puede ser transferido a O4 para una mejor visualización). Es necesario calcular [CCH83].

?? El grupo de coordenadas (R4) sobre el grupo de coordenadas (Ro).

?? Las coordenadas de O4 y O5 en el grupo de coordenadas (Ro).

Utilizaremos la siguiente notación [CCH83]:

$M_{R'}^{R}$ = eje de R' expresado en R

base (R_4 / R_0) ? $M_{R_4}^{R_0}$? M_4^0

De aquí se deriva:

base $(R_n / R_{n?1})$? $M_n^{n?1}$

pero $(R_n / R_{n?2})$? $M_n^{n?2}$? $M_{n?1}^{n?2} M_n^{n?1}$

Nota: el orden de las matrices es muy importante, así que [CCH83]:

base (R_4 / R_0) ? M_4^0 ? $M_1^0 M_2^1 M_3^2 M_4^3$

M_1^0 corresponde a la rotación de (R_1) relacionado a (R_0) a través de un ángulo ? sobre ?$_0$.

$$M_1^0 \ ? \begin{bmatrix} \cos ?_1 & sen?_1 & 0 & 0 \\ ? \ sen?_1 & \cos ?_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_2^1 corresponde a la rotación de (R_2) relacionado a (R_1) a través de un ángulo $?$ sobre X_1.

$$M_2^1 \ ? \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos ?_2 & sen?_2 & 0 \\ 0 & ? \ sen?_2 & \cos ?_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_3^2 corresponde a la traslación de (R_3) relativo a (R_2) de trayectoria TY3 sobre el eje Y_3.

$$M_3^2 \ ? \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ? \ ?$$

M_4^3 corresponde a la rotación de (R_4) relativo a (R_3) a través de un ángulo $?$ sobre X_3.

$$M_4^3 \ ? \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos ?_4 & sen?_4 & 0 \\ 0 & ? \ sen?_4 & \cos ?_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para simplificar las notaciones, hagamos $\cos ?_i \ ? \ C_i$ y $sen?_i \ ? \ S_i$, entonces tendremos:

$$base(R_4 / R_0) = M_4^0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & -S_4 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 C_{(2+4)} & S_1 S_{(2+4)} & 0 \\ 0 & C_1 C_{(2+4)} & C_1 S_{(2+4)} & 0 \\ 0 & -S_{(2+4)} & C_{(2+4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa que la precisión del vector unitario de R_4 sobre los ejes de (R_0) relativo a las coordenadas de X son C_1 sobre el eje OX_0, S_1C sobre OY_0, $S_1S_{(2+4)}$ sobre OZ_0 y y el vector unitario de R_4 relativo a las coordenadas de Y son - S_1 sobre OX_0, etc. [CCH83].

El uso de esta metodología nos ayuda a comprender mejor lo que está pasando dentro del mundo virtual y los objetos que lo conforman. En el siguiente capítulo analizaremos cómo VRML hace uso de la metodología mencionada.

2.3 Uso de los conceptos por VRML 2.0

VRML puede representar:

- objetos 3d estáticos
- objetos 3d animados
- objetos multimedia
- con hipervínculos a otros medios (texto, sonido, imágenes, etc.)

VRML hace uso de los conceptos de graficación y robótica para poder plasmar un objeto y sus diferentes comportamientos en un escenario 3D. De manera general, explicaremos a continuación algunos de los componentes de VRML que constituyen una estructura básica de VRML.

Uno de los componentes dentro de la sintaxis de VRML es el nodo (*node*), el cual proporciona los detalles de la información, tales como dimensiones, luces, sonidos, etc. de una escena en 3D [www22].

Las dimensiones de un objeto en VRML son plasmadas por defecto en el origen del sistema de coordenadas universal, como se muestra en la Fig. 3.1 [www22]:

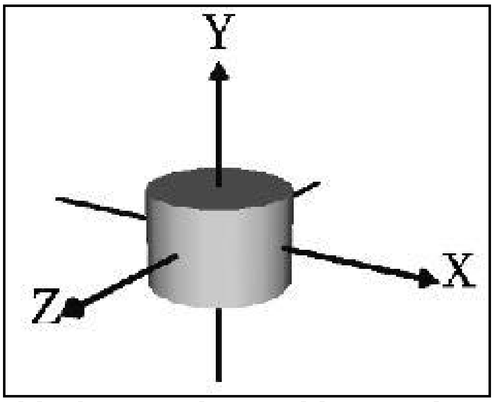

Fig. 3.1 VRML modela objetos en el origen del sistema de coordenadas universal

Una transformación en VRML crea un sistema de coordenadas que es posicionado, rotado y escalado tomando como referencia el sistema de coordenadas padre, es decir, el sistema de coordenadas universal XYZ [www22].

Las dimensiones del objeto construidas en el nuevo sistema de coordenadas son posicionadas, rotadas y escaladas junto con él.

El nodo del grupo *Transform* en VRML crea un grupo con su propio sistema de coordenadas como sigue [www23]:

- ?? *children* - dimensiones a construir
- ?? *translation* - posición
- ?? *rotation* - orientación
- ?? *scale* - tamaño

Así entonces, uno puede crear comportamientos propios para realizar movimientos, rotaciones, escalados, parpadeos (como lo son las luces de un semáforo) y más [www22].

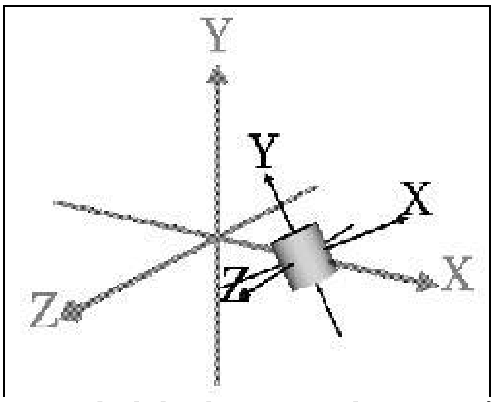

Figura 3.2 Ejemplo de las dimensiones de una transformación de traslación, rotación y escalación.

Técnicamente hablando, VRML no es un lenguaje para programar realidad virtual inmersiva. La realidad virtual inmersiva, como se ha mencionado ya anteriormente, implica una experiencia tridimensional inmersiva y dispositivos externos como cascos o guantes digitales para lograr capturar otros sentidos diferentes al oído y a la vista. VRML no requiere o no proporciona una inmersión sensorial total [www8].

Los elementos complejos que se usan para el proyecto (huesos, órganos, etc.) son difíciles de construir con las formas primitivas. Para tal caso, VRML construye objetos de formas complejas basándose en componentes atómicos como :

?? Puntos (points)

?? Líneas (lines)

?? Rostros (faces)

Este conjunto de nodos complejos que VRML provee, para el modelado geométrico tridimensional, tiene la capacidad de dar comportamiento a los objetos y asignar diferentes animaciones que pueden ser activadas por eventos generados por diferentes usuarios (se hará énfasis en este punto más adelante).